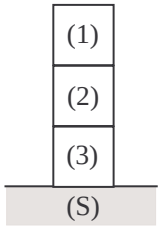
M2

■ Dynamique newtonienne

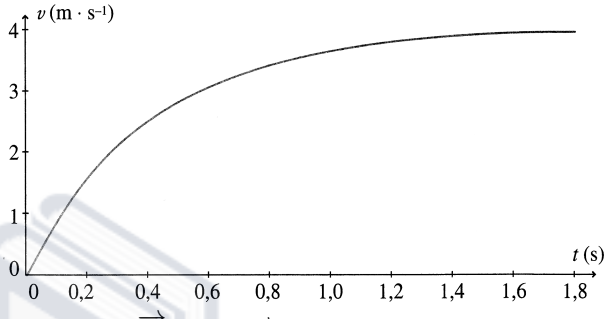
Ex-M2.1 Cube superposés



Soit trois cubes (1), (2) et (3) posés l'un sur l'autre, l'ensemble reposant sur le sol (S). On note $\overrightarrow{F}_{1\to 2}$ l'action de (1) sur (2), par exemple.
→ Calculer : $F_{1\to 2}$, $F_{3\to 2}$ et $F_{S\to 3}$.
Données : $m_1 = 100\ g$; $m_2 = 200\ g$; $m_3 = 400\ g$; $g = 10,0\ m.s^{-2}$.
Rép. : $F_{1\to 2} = m_1 g = 1,0\ N$; $F_{3\to 2} = (m_1 + m_2)\, g = 3,0\ N$
$F_{S\to 3} = (m_1 + m_2 + m_3)\, g = 7,0\ N$.
Rq : Les expressions littérales peuvent sembler intuitives : mais, ici, on doit les établir par un *raisonnement* (élémentaire, certes, mais raisonnement quand même !)

Ex-M2.2 Cœfficient de frottement

Une bille de masse $m = 120\ g$ tombe dans un fluide. On a enregistré sa vitesse (norme) v en fonction du temps.



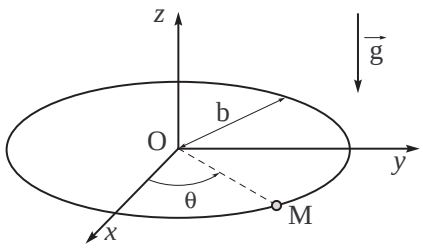
1) Quelles sont les différentes phases du mouvement ?
2) Donner une valeur approximative du temps caractéristique τ de ce mouvement.
3) Quelle est la valeur limite de v (notée v_{lim}) ?
4) En négligeant la poussée d'ARCHIMÈDE et en prenant $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$ $(k > 0)$ comme force de frottement, établir l'équation différentielle satisfaite par v.
5) En déduire l'expression de v_{lim} en fonction de m, k et g.
6) Calculer la valeur de k.
Rép : 2) $\tau \approx 0,4\ s$ (cf. ¡¡méthode de la tangente¿¿) ; **4/5)** cf. COURS ; **6)** $k \approx 0,29\ kg.s^{-1}$ (**attention aux unités !** ; cf. Cours).

Ex-M2.3 Profondeur d'un puits

Pour mesurer la profondeur d'un puits, Mímir laisse tombe rune pierre du bord du puits et chronomètre la durée qui s'écoule jusqu'au moment où il entend le bruit de l'impact de la pierre au fond du puits (il a pris soin de placer son oreille à hauteur du bord du puits). La durée mesurée est $\Delta t = 2,6\ s$. → Calculer la profondeur h du puits.
On négligera les frottements de l'air sur la pierre et l'équation en h sera résolue numériquement.
Données : $g = 9,81\ m.s^{-2}$; célécité du son dans l'air : $c = 340\ m.s^{-1}$.
Rép : $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{h}{c}$; d'où : $h \approx 31\ m$.

Ex-M2.4 Anneau glissant sur un cercle

Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur un cercle fixe de centre O et de rayon b placé horizontalement dans le plan (Oxy).
´À l'instant $t = 0$, une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ tangente au cercle est communiqué à l'anneau qui glisse alors sans frottement le long du guide.
→ Déterminer les composantes de la réaction $\overrightarrow{R}$ du guide circulaire sur l'anneau.



Ex-M2.5 Point soumis à une force centrale et à une force de frottement fluide

Un point matériel M de masse m se déplace sur un plan horizontal (on suppose la réaction du plan normale au plan). M est lancé à partir de M_0, de coordonnées cartésiennes $(0, y_0)$ et est soumis à la force $\overrightarrow{F} = -a\overrightarrow{OM}$ et à une force résistante $\overrightarrow{f} = -b\overrightarrow{v}$ (a et b sont des constantes

exosup.com page facebook

positives).

1) Établir en coordonnées polaires, les équations différentielles du mouvement de M.

2) Dans le cas où $\dot{\theta} = \omega = cste$, déterminer ω et l'expression de r en fonction du temps.

Rép : 1) Système ? référentiel ? bilan des forces ? projeter le **P.F.D.** dans la base cylindrique ;

2) $r(t) = y_0 \exp\left(-\dfrac{bt}{2m}\right)$ et $\omega = \sqrt{\dfrac{a}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}}$.

Ex-M2.6 Chute libre d'une tige

Une tige rectiligne AB verticale de longueur $l = 80\ cm$, lâchée avec une vitesse initiale nulle, tombe en chute libre dans le vide. Elle passe au cours de sa chute par un trou ménagé dans une plaque horizontale de faible épaisseur. Quand son extrémité inférieure A atteint le trou, sa vitesse est $v = 5m.s^{-1}$.

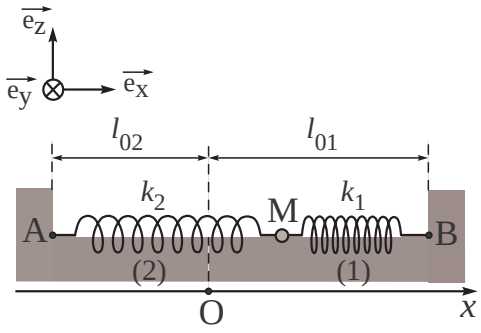
1) À quelle distance h de la plaque se trouvait initialement le point A ?

2) Quelle est la vitesse v' de la tige lorsque son extrémité supérieure B sort du même trou ?

3) Quelle est la durée T du passage de la tige à travers le trou ?

Rép : 1) $h = 1,25\ m$; **2)** $v' = 6,4\ m.s^{-1}$; **3)** $T = 0,14\ s$.

Ex-M2.7 Point matériel reliés entre deux ressorts horizontaux



Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressort (1) et (2) horizontaux de raideurs k_1 et k_2, et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} reliés à deux points fixes A et B distants de $(l_{01} + l_{02})$.

Le point M glisse sans frottement le long de l'axe (Ox) à partir de sa position d'équilibre. Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$.

1) Justifier la position d'équilibre en O du point M.

2) Établir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la période T des oscillations et la raideur k du ressort équivalent à cette association.

3) À l'instant $t = 0$, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0. Déterminer l'équation horaire du mouvement $x(t)$.

Rép : 2) $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$; **3)** $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$.

Ex-M2.8 Le peintre et la poulie

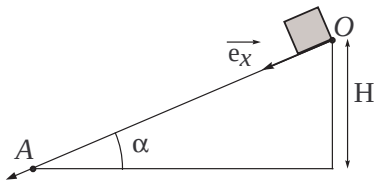
Un peintre en bâtiment de masse $M = 90\ kg$ est assis sur une chaise le long d'un mur qu'il doit peindre. Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite. Pour grimper, le peintre tire sur l'autre extrémité de la corde avec une force de 680 N. la masse de la chaise est $m = 15\ kg$. On travaille avec la verticale (Oz) ascendante.

1) Déterminer l'accélération $\vec{a} = a.\vec{e_z}$ du peintre et de la chaise. Commenter son signe.

2) Quelle force $\vec{F} = \vec{e_z}$ le peintre exerce-t-il sur la chaise ?

Rép : 1) $a = 3,15\ m.s^{-2}$; **2)** $F \simeq -486\ N$.

Ex-M2.9 Glissement d'un solide sur un plan incliné



Un solide supposé ponctuel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure de la ligne de plus grande pente Ox d'un plan incliné d'angle α, sans vitesse initiale. On note H la distance de ce point initial O au plan horizontal et g l'intensité du champ de pesanteur.

1) Absence de frottement

• Déterminer l'accélération du mobile à l'instant t, lorsque les frottements de glissement sont négligés.

exosup.com page facebook

• En déduire la vitesse du mobile au point A.

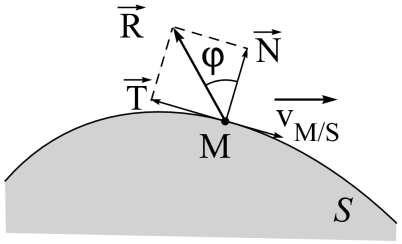
2) Existence de frottement de glissement ➜ Cf Complément de Cours ci-après !

• Quelle est la condition sur f, le cœfficient de frottement pour que le solide commence à glisser à $t = 0$?

• Reprendre les questions de la partie **1**.

Rappel et Compléments du cours

Force de frottement solide, réaction du support



Lors du contact entre deux solides, donc lors du contact entre un point matériel M (m) et un solide $\mathcal{S}$, ce dernier exerce sur le point M une force $\overrightarrow{R}$ appelée réaction, composée d'une réaction normale (à la surface de contact) $\overrightarrow{N}$, et d'une réaction tangentielle $\overrightarrow{T}$ (dite force de frottement) vérifiant **Les lois de Coulomb** :

• S'il y a glissement de M sur S : $\boxed{||\overrightarrow{T}|| = f\,||\overrightarrow{N}||}$ où f est le *cœfficient de frottement*[a]

• S'il n'y a pas de glissement de M sur $\mathcal{S}$ $(\overrightarrow{v_{M/\mathcal{S}}} = \overrightarrow{0})$: $\boxed{||\overrightarrow{T}|| < f\,||\overrightarrow{N}||}$.

Remarques :

• En posant $\overrightarrow{N} \equiv N\,\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire dirigé de $\mathcal{S}$ vers M, perpendiculaire à la surface de contact) : le contact se maintient si $N > 0$ et le contact cesse si $N = 0$.

• En l'absence de frottement ($f = 0$), la réaction du solide $\mathcal{S}$ est normale, c'est-à-dire $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N}$; elle reste donc à chaque instant perpendiculaire au support.

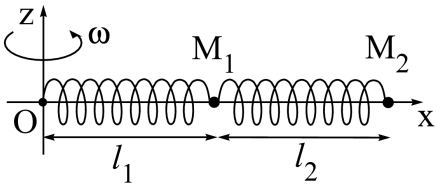
a. Le cœfficient de frottement f dépend des matériaux en contact mais pas de la surface de contact. Par exemple $f = 0,6$ pour le contact caoutchouc / bitume

Ex-M2.10 Points matériels en rotation

Un système de deux particules identiques M_1 et M_2 (de masse m) peut coulisser sans frottement sur un axe rigide horizontal Ox. M_1 est lié à O, et M_2 est lié à M_1 par deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.

L'axe Ox tourne autour de Oz à la vitesse angulaire constante ω. On pose $K \equiv \dfrac{k}{m\omega^2}$.

→ Trouver les deux équations du mouvement liant l_1, l_2, l_0 et K.



Conseil : Appeler $(Ox_0y_0z_0)$ le repère cartésien du référentiel terrestre. Faire une vue de dessus pour une position quelconque de la tige. faire apparaître l'angle orienté θ entre l'axe (fixe) des abscisses (Ox_0) et la tige (Ox). Faire apparaître la base locale adaptées à l'étude de M_1 et de M_2.

Rép : $\ddot{l}_1 + \omega^2(K-1)l_1 = \omega^2 K l_2$ et $\ddot{l}_2 + \omega^2(2K-1)l_2 = \omega^2 K(l_1 + l_0)$

Ex-M2.11 fil élastique lesté

Un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos l_0, est fixé par ses extrémités en deux points A et B de même altitude et distants de d. Il est lesté en son milieu par un objet quasi ponctuel M de masse m.

→ Caractériser la position d'équilibre (par exemple θ, angle que font les forces de rappel $\overrightarrow{T}_A$ et $\overrightarrow{T}_B$ des deux parties du ressort sur M avec l'horizontale).

Données : $m = 2,0\ kg$; $g = 9,8\ m.s^{-2}$; $k = 1,0.10^2\ N.m^{-1}$; $l_0 = 1,0\ m$; $d = 80\ cm$.

Rappel du cours M2 : En plaçant M au milieu du ressort $[AB]$ (k, l_0), on sait qu'on peut le remplacer par un ressort $[AM]$ $\{k_A = k_0, l_{A0} = \frac{l_0}{2}\}$ en série avec un ressort $[MB]$ $\{k_B = k_0, l_{B0} = \frac{l_0}{2}\}$ tel que k_0 s'exprime facilement en fonction de k.

exosup.com page facebook

➤ **Solution :** Faire un schéma précis avec des notations claires après avoir lu l'énoncé. Y faire apparaître les trois forces qui s'exercent sur M à l'équilibre.

Projeter le **P.F.D.** à l'équilibre dans le repère (Oxz) où (Ox) est l'horizontale, Oz la verticale ascendante et O milieu de $[AB]$.

En déduire que le deux moitiés de ressort exercent des tensions identiques d'intensité $T_A = T_B = \dfrac{mg}{2\sin\theta}$.

Que vaut la constante de raideur d'un ressort de longueur à vide la moitié de celle d'un d'un ressort de raideur k ?

En déduire que : $\dfrac{mg}{2k} = |d\tan\theta - l_0\sin\theta|$.

Si on fait l'hypothèse des petits angles : $\theta \approx \dfrac{mg}{2k|d-l_0|}$. Les données de l'énoncé donnent alors $0,49\ rad = 28°$, qui n'est pas un petit angle → il faut donc résoudre numériquement la première expression.

On trouve $\theta \approx 0,79\ rad$.

Ex-M2.12 Point sur une tige en rotation uniforme dans $\mathcal{R}_T$

Une tige OP rigide est soudée sur un plateau tournant à vitesse angulaire constante ω. Cette tige forme un angle constant α avec l'axe vertical $(Oz) = (\Delta)$.

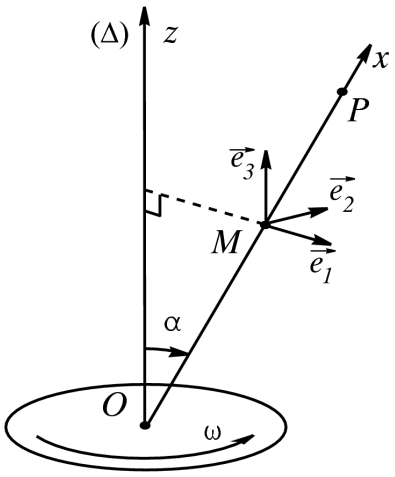
Un point matériel de masse m pouvant glisser sans frottement est en équilibre relatif sur la tige.

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

1) préciser la position x_e de l'équilibre relatif ;

2) donner les composantes R_1, R_2 et R_3 de la réaction $\overrightarrow{R}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ liée à la tige.

Conseil : Reconnaître la nature de la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ avant toute autre chose.



Rép :

1) $x_e = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$; **2)** $R_1 = -\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $R_2 = 0$ $R_3 = mg$

Ex-M2.13 Tir balistique sans frottement

Un obus sphérique de masse m assimilé à un point matériel M est lancé dans l'air avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ depuis le point O, origine du repère $(O; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié au référentiel terrestre $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen.

La vitesse $\overrightarrow{v_0}$ fait un angle α avec l'horizontale Ox dans le plan Oxz. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est supposé uniforme et Oz est la verticale ascendante du lieu. On néglige tout frottement.

1) Déterminer l'équation de la trajectoire.

2) Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte). Pour quel angle α la flèche est-elle maximale ?

3) Déterminer la portée D (distance entre O et le point de chute sur le plan horizontal $z = 0$). Pour quel angle α la portée D est-elle maximale ?

Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

4) Comment choisir l'angle de tir α pour que la trajectoire passe par un point A de coordonnées (x_A, y_A) ?

Définir la parabole de sûreté.

Données : $g = 9;81\ m.s^{-2}$; $v_0 = 30\ m.s^{-1}$; $m = 1\ kg$.

Rép : Cf. p.

Ex-M2.14 Tir balistique avec force de frottement proportionnelle à la vitesse

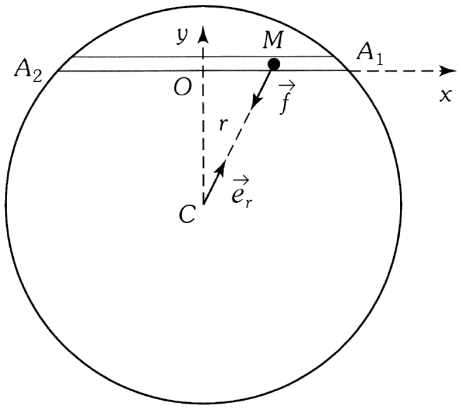
On reprend les données de l'exercice précédent en supposant, cette fois, que l'obus est soumis à une force de frottement (traduisant la résistance de l'air) du type : $\overrightarrow{F} = -\lambda\,\overrightarrow{v}$ en plus de son poids.

1) Déterminer les composantes $(v_x(t); v_z(t))$ du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{m/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{v}$ à chaque instant.

exosup.com page facebook

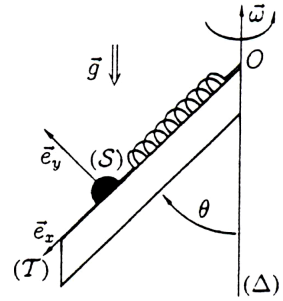
2) Déterminer les composantes $(x(t);\, y(t))$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à chaque instant.
3) Déterminer et calculer la flèche de la trajectoire.
4) Montrer que la trajectoire tend vers une asymptote verticale dont on précisera la position.
5) Montrer que la vitesse de l'obus tend vers une limite que l'on déterminera.
6) Tracer l'allure de la trajectoire.
Données : $\alpha = 45°$; $g = 9;81\ m.s^{-2}$; $v_0 = 30\ m.s^{-1}$; $m = 1\ kg$; $\lambda = 0,1\ kg.s^{-1}$.
Rép : cf. p.

Ex-M2.15 Cavité dans un astéroïde [P4/104]



Soit un astéroïde, de forme sphérique (centre C, rayon R) qui présente une cavité cylindrique de petite section, de longueur $A_1A_2 = L$ et de milieu O. Un point matériel de masse m, abandonné en A_1, à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale, se déplace le long de la cavité.
On admet que ce point matériel situé en M, à l'instant t, tel que $\overrightarrow{CM} = r.\overrightarrow{e_r}$ $(r = CM)$, est soumis à l'action de la force gravitationnelle (de l'astéroïde) $f = -m.g_0.\dfrac{r}{R}.\overrightarrow{e_r}$.
g_0 représente la norme du champ de gravitation à la surface de l'astéroïde.
On note $\overrightarrow{f_1}$ l'action du support A_1A_2 sur le point matériel M.
On pose $\overrightarrow{OM} = x$ et on néglige les frottements.
1) Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel M dans le référentiel d'axe Ox, supposé galiléen.
Quelle est l'expression de x en fonction de t et des paramètres du système ? Quelle est l'expression de la réaction du support ?
2) Déterminer la durée τ du trajet A_1A_2 et la vitesse maximale v_{max} du point M.

Ex-M2.16 Ressort sur un plan incliné [ENAC96 ;[P8/132]]



Un système est constitué d'une glissière $(\mathcal{T})$ soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical (Δ).
Sur la glissière inclinée d'un angle θ fixe par rapport à la verticale est posé un solide $(\mathcal{S})$ de masse m qui peut glisser sans frottement sur $(\mathcal{T})$. Ce solide que l'on peut considérer comme ponctuel, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur k, de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixée au bâti.
1) Le système étant tout d'abord immobile, calculer la longueur $l_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre.
2) Le système est mis en rotation autour de l'axe vertical (Δ) avec une vitesse angulaire constante ω suffisamment faible pour que $(\mathcal{S})$ reste en contact de $(\mathcal{T})$.
a) Calculer les composantes dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ de l'accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ du solide $(\mathcal{S})$ dans le référentiel fixe du laboratoire quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre $l'_{\text{éq}}$.
b) Exprimer $l'_{\text{éq}}$.
c) Déduisez-en la réaction $\overrightarrow{R}$ de la glissière sur $(\mathcal{S})$.
3) La vitesse de rotation du solide est maintenant ω_0. Elle est telle que le solide décolle juste de la glissière quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre $l''_{\text{éq}}$.
Exprimer la nouvelle longueur à l'équilibre $l''_{\text{éq}}$ et déduisez-en ω_0 en fonction de k, m, l_0 et θ.

Rép : 1) $l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}.\cos\theta$; **2.a)** $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = -l'_{\text{éq}}.\omega^2 \sin\theta.(\sin\theta.\overrightarrow{e_x} + \cos\theta.\overrightarrow{e_y})$;
2.b) $l'_{\text{éq}} = \frac{mg.\cos\theta + k.l_0}{k - m\omega^2 \sin^2\theta}$; **2.c)** $\overrightarrow{R} = mg\sin\theta.(g - l'_{\text{éq}}\omega^2.\cos\theta).\overrightarrow{e_y}$; **3)** $l''_{\text{éq}} = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} = \frac{mg.\cos\theta + k.l_0}{k - m\omega_0^2 \sin^2\theta}$;
$\omega_0 = \sqrt{\frac{kg}{mg + kl_0\cos\theta}}$

exosup.com page facebook

Solution Ex-M2.13

1) • **Système étudié** : obus sphérique assimilé à un point matériel M (m).
• **Référentiel d'étude** : le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen lié au repère d'espace $(O;\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z})$.
• **Le bilan des forces** appliquées au point M se réduit au seul poids $\vec{P} \equiv m\,\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$.
• Application du **P.F.D.** au point M dans $\mathcal{R}_g$:

$$m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \vec{P} \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\,\vec{g}$$

En simplifiant par m et en intégrant vectoriellement, on obtient : $\vec{v}(t) = \vec{g}\,t + \vec{K}$
$\vec{K}$ est une constante vectorielle qui s'obtient en considérant les **Conditions Initiales** ; or, à $t = 0$, on a $\vec{v}(t=0) \equiv \vec{v_0} = \vec{K}$. Donc : $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{g}\,t + \vec{v_0}}$

• Comme $\vec{v} \equiv \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g}$, l'équation précédente peut s'intégrer à nouveau par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{g}\,\frac{1}{2}t^2 + \vec{v_0}\,t + \vec{K'}$$

Où $\vec{K'}$, constante d'intégration vectorielle, s'obtient elle aussi grâce aux conditions initiales (à $t = 0$) : $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} = \vec{K'}$, soit : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \vec{g}\,\dfrac{t^2}{2} + \vec{v_0}\,t}$

• Cette équation vectorielle sur $\overrightarrow{OM}(t) \equiv x(t)\,\vec{e_x} + z(t)\,\vec{e_z}$ peut se projeter selon les axes Ox, Oy et Oz :

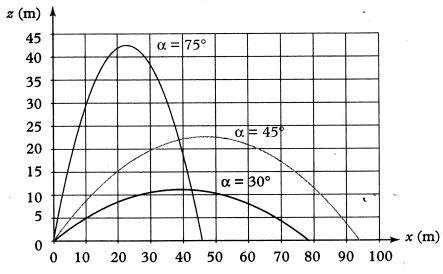
- en projetant selon $\vec{e_x}$, on obtient : $x(t) = v_0 \cos\alpha\,.t$ ①
- en projetant selon $\vec{e_y}$, on obtient : $y(t) = 0$
- en projetant selon $\vec{e_z}$, on obtient : $z(t) = -g\,\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha\,.t$ ②

• L'équation de la trajectoire s'obtient ¡¡ en éliminant le temps ¿¿ :

$$② \xrightarrow{①} z = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\,\tan\alpha} \;③$$

Conclusion : La trajectoire est une portion de parabole.

La figure ci-contre représente trois trajectoires obtenues pour différents angles α $(30°,\ 45°,\ 75°)$.



2) • La flèche est atteinte lorsque la vitesse verticale s'annule.
En projetant l'équation $\vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{v_0}$ sur $\vec{e_z}$,
on obtient : $v_z = -g\,t + v_0\sin\alpha$ qui s'annule pour $\boxed{t_F = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}}$.

• Ainsi la flèche de la trajectoire est le point $F\,(x_F,\ z_F)$ dont les coordonnées sont obtenues en remplaçant t par t_F dans les relations ① et ② :

$$\boxed{x_F = x(t_F) = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}}\;④ \quad \text{et} \quad \boxed{z_F = z(t_F) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}\;⑤$$

3) • La portée est atteinte lorsque $z = 0$; on obtient donc cette portée en cherchant la solution à l'équation suivante :

$$② \xrightarrow{z=0} -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\tan\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x + \tan\alpha\right) = 0$$

exosup.com page facebook

• La solution $x = 0$ est à écarter puisqu'elle correspond au point de départ du tir. La portée est donc la seconde solution :

$$\boxed{D = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \equiv 2x_F} \quad ⑥$$

• Pour que la portée soit maximale, il faut qu'elle soit solution de $\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\alpha}\right) = 0$, soit $\cos(2\alpha) = 0$, soit $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ (et pas autre chose puisque α est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$) ; donc :

$$\boxed{\alpha_m = \frac{\pi}{4}\, rad \quad \Leftrightarrow \quad D = D_m = \frac{v_0^2}{g}}$$

• **AN :** $\boxed{D_m = 91,7\ m}$; et pour la valeur correspondante de α (45°), on a $\boxed{z_F = 22,9\,m}$ et $\boxed{x_F = 45,9\,m}$ (cf. Graphique).

4) On veut atteindre $A(x_A, z_A)$ en gardant $\|\vec{v}(t=0)\| = v_0$:
A doit donc appartenir à la trajectoire : $z_A = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} x_A^2 + \tan\alpha\, x_A$

De plus, on sait que $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

d'où $+\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)\, x_A^2 - \tan\alpha\, x_A + z_A = 0$

$$\frac{g x_A^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha - x_A \tan\alpha + \left(\frac{g x_A^2}{2v_0^2} + z_A\right) = 0 \quad (7)$$

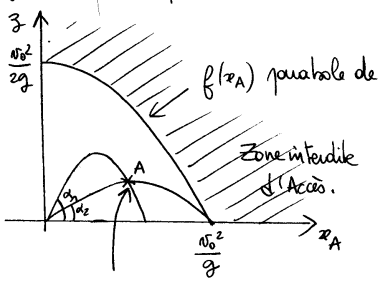
Eq du 2d degré en $\tan\alpha$ de discriminant $\Delta = x_A^2 - 4\frac{g x_A^2}{2v_0^2}\left(\frac{g x_A^2}{2v_0^2} + z_A\right)$

Pour avoir une solution $\tan\alpha$ réelle il faut $\Delta \geq 0$ (8)

Soit $1 - \frac{2g}{v_0^2}\left(z_A + \frac{g x_A^2}{2v_0^2}\right) \geq 0$ soit $\frac{v_0^2}{2g} \geq z_A + \frac{g x_A^2}{2v_0^2}$

Soit : $-\frac{g x_A^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \geq z_A$ soit $f(x_A) \geq z_A$

$f(x_A)$ est une parabole de sommet $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$



si $f(x_A) \leq z_A$ alors $A(x_A, z_A)$ ne sera jamais atteint quelque soit α

Ce point A est atteint lorsque (7) et (8) sont vérifiées, c'est-à-dire

pour $\begin{cases} z_A < \frac{v_0^2}{2g} \\ \tan\alpha \text{ solut° de (7)} \end{cases}$ $\Delta = x_A^2 - \frac{g^2 x_A^4}{v_0^4}\left(1 + \frac{2v_0 z_A}{g x_A^2}\right)$

$\tan\alpha = \frac{x_A \mp \sqrt{\Delta}}{\frac{g x_A^2}{2v_0^2}}$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v_0^2}{g x_A} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x_A^2} - \left(1 + \frac{2v_0 z_A}{g x_A^2}\right)}} \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2)$$

exosup.com page facebook

Solution Ex-M2.14

1) • **Système étudié** : obus sphérique assimilé à un point matériel M (m).
• **Référentiel d'étude** : le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen lié au repère d'espace $(O;\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z})$.
• **Le bilan des forces** appliquées au point M se réduit au poids $\vec{P} \equiv m\,\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$ et à la force de frottement de l'air $\vec{F} = -\lambda\,\vec{v}$.
• Application du **P.F.D.** au point M dans $\mathcal{R}_g$:

$$m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \vec{P} + \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\,\vec{g} - \lambda\,\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} + \frac{\lambda}{m}\,\vec{v} = \vec{g}$$

• En définissant une constante *temporelle* $\boxed{\tau \equiv \dfrac{m}{\lambda}}$, l'équation différentielle sur $\vec{v}$ devient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} + \frac{1}{\tau}\,\vec{v} = \vec{g} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}(t) = \vec{A}\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\,\vec{g}$$

• $\vec{A}$ est une constante vectorielle d'intégration qu'on détermine grâce aux conditions initiale $(t=0)$: en effet, puisque $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0}$, on a :

$$\vec{v_0} = \vec{A} + \tau\,\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = (\vec{v_0} - \tau\,\vec{g})\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\,\vec{g}} \ \textcircled{1}$$

• Pour déterminer les composantes $(v_x(t);\ v_z(t))$ du vecteur vitesse, il suffit de projeter ① :

- ∘ en projetant selon $\vec{e_x}$, on obtient : $\boxed{v_x(t) = v_0\cos\alpha\,\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$ ②
- ∘ en projetant selon $\vec{e_y}$, on obtient : $v_y(t) = 0$
- ∘ en projetant selon $\vec{e_z}$, on obtient : $\boxed{v_z(t) = (v_0\sin\alpha + \tau g)\,\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - \tau g}$ ③

2) Les composantes $(x(t);\ y(t))$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ peuvent s'obtenir :
(a) en intégrant ② et ③ par rapport au temps puis en appliquant les conditions initiales (**C.I.**)
(b) en intégrant directement l'équation vectorielle ①, en appliquant les CI, puis en projetant selon Ox et Oz.
Cette dernière méthode a l'avantage de ne passer que par un seul calcul de primitive. Ainsi, une primitive vectorielle de ① est :

$$\overrightarrow{OM}(t) = -\tau\,(\vec{v_0} - \tau\,\vec{g})\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\,\vec{g}\,.t + \vec{B}$$

Or, les **C.I.** imposent : $\overrightarrow{OM}(t=0) \equiv \vec{0} = -\tau\,(\vec{v_0} - \tau\,\vec{g}) + \vec{B} \ \Leftrightarrow\ \vec{B} = \tau\,(\vec{v_0} - \tau\,\vec{g})$

Soit : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = -\tau\,(\vec{v_0} - \tau\,\vec{g})\,\left(\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - 1\right) + \tau\,\vec{g}\,.t}$

- ∘ en projetant selon $\vec{e_x}$, on obtient : $\boxed{x(t) = -\tau\,v_0\cos\alpha\,\left(\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - 1\right)}$ ④
- ∘ en projetant selon $\vec{e_z}$, on obtient : $\boxed{z(t) = -\tau\,(v_0\sin\alpha + \tau g)\,\left(\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - 1\right) - \tau g.t}$ ⑤

3) • La flèche $F\,(x_F,\ z_F)$ de la trajectoire est obtenue au moment où la vitesse s'annule selon $\vec{e_z}$, soit lorsque : $v_z - (t_F) = 0 \xrightarrow{③} (v_0\sin\alpha + \tau g)\exp\left(-\dfrac{t_F}{\tau}\right) = \tau g$

$$\Leftrightarrow \quad \exp\left(-\frac{t_F}{\tau}\right) = \frac{\tau g}{\tau g + v_0\sin\alpha}\ \textcircled{6} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_F = \tau\ln\left(\frac{v_0\sin\alpha + \tau g}{\tau g}\right) = \tau\ln\left(1 + \frac{v_0\sin\alpha}{\tau g}\right)}\ \textcircled{7}$$

exosup.com page facebook

• En reportant ⑥ dans ④ et ⑤, on obtient les coordonnées de la « flèche » :

$$④ \xrightarrow{⑥} \quad x_F = x(t_F) = -\tau\, v_0 \cos\alpha \left(\frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin\alpha} - 1 \right)$$

Soit : $\boxed{x_F = \dfrac{\tau\, v_0^2 \sin(2\alpha)}{2\,(\tau g + v_0 \sin\alpha)}}$ **AN :** $\boxed{x_F = 37,7\ m}$

$$⑤ \xrightarrow{⑥,\,⑦} \quad z_F = z(t_F) = -\tau\,(v_0 \sin\alpha + \tau g) \left(\frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin\alpha} - 1 \right) - \tau^2 g \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin\alpha}{\tau g}\right)$$

Soit : $\boxed{z_F = \tau\, v_0 \sin\alpha - \tau^2 g \ln\left(1 + \dfrac{v_0 \sin\alpha}{\tau g}\right)}$ **AN :** $\boxed{z_F = 20,1\ m}$

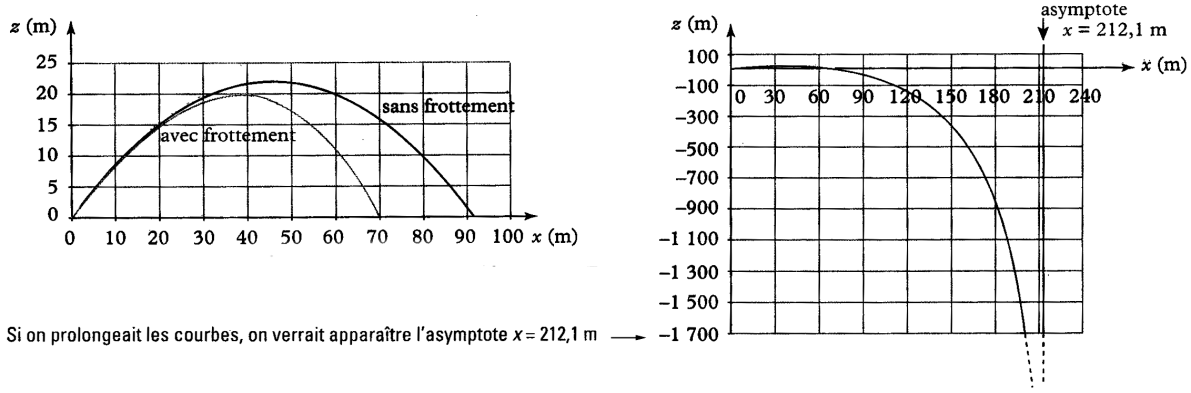
• **Rque :** On constate que l'abscisse x_F et l'altitude z_F de la flèche sont plus petites que dans le cas où il n'y a pas de frottement (cf. AN de **Ex-M2.13**) : cela est bien cohérent avec l'action d'une force de frottement ...

4) • Lorsque $t \to +\infty$, alors $x(t) \to \tau v_0 \cos\alpha$. Ce comportement correspond à l'existence d'une **asymptote verticale**.
• **AN :** $\boxed{x_\infty = \tau v_0 \cos\alpha = 212,1\ m}$.

5) Il suffit de reprendre ① pour constater que lorsque $t \to \infty$, alors $\overrightarrow{v} \to \tau\,\overrightarrow{g}$:

$$\boxed{\overrightarrow{v_\infty} = \tau\,\overrightarrow{g} = \tau g\,\overrightarrow{e_z}} \qquad \textbf{AN :} \ \boxed{v_\infty = \tau g = 98,1\ m.s^{-1}}$$

6) Sur un dessin de trajectoire qui se limite aux altitudes positives :
(a) on retrouve une flèche plus basse que dans le cas du tir balistique sans frottement,
(b) mais on ne perçoit pas l'asymptote verticale car celle-ci est atteinte pour une position $x_\infty = 212,1\ m$ bien supérieure à la portée D de la trajectoire ($D \simeq 70\ m$).



exosup.com page facebook